

LES PUISSANCES

I. Puissances entières d'un nombre relatif : exposant entier positif

Définition :

Soit a un nombre relatif et n un entier positif non nul.

On note a^n , le nombre $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$, c'est-à-dire le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

Exemples : $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$

$$(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

Par convention, si $a \neq 0$: $a^0 = 1$. $\rightarrow (-8)^0 = 1$

Attention !

- Il ne faut pas confondre 5^3 et 5×3 ! $\rightarrow 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ et $5 \times 3 = 15$
- Il ne faut pas confondre 3^4 et 4^3 ! $\rightarrow 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ et $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- Il ne faut pas confondre $(-3)^4$ et -3^4 !

$$\rightarrow (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81 \quad \text{et} \quad -3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$$

Remarques :

(i) Pour tout a , $a^1 = a$

(ii) **Les puissances d'exposants pairs sont toujours positives**

$(-8)^{42}$ en est un exemple.

II. Puissances entières d'un nombre relatif : exposant entier négatif

Définition :

Soit a un nombre relatif non nul et n un entier non nul.

On note a^{-n} l'inverse de a^n , c'est-à-dire que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n}$$

Exemples : 2^{-3} est l'inverse de 2^3 $\rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3) \times (-3)} = \frac{1}{9}$$

Cas particulier, si $a \neq 0$: a^{-1} est l'inverse de a : $a^{-1} = \frac{1}{a}$. $\rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Règles de calcul

1. Les puissances de nombres relatifs

Quelques exemples de calculs :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$4^2 \times 4^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ $= 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = \frac{(-3) \times (-3) \times (-3)}{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}$ $= \frac{1}{(-3) \times (-3)}$ $= \frac{1}{(-3)^2}$ $= (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = \frac{1}{(6^3)^2}$ $= \frac{1}{(6 \times 6 \times 6)^2}$ $= \frac{1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}$ $= \frac{1}{6^6} = 6^{-6}$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
$4^2 \times 4^3 = 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = (-3)^{3-5} = (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = 6^{3 \times (-2)} = 6^{-6}$

Attention !

Il ne faut pas confondre $4^2 + 4^3$ avec 4^5 !

$$\rightarrow 4^2 + 4^3 = 16 + 64 = 80 \text{ et } 4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$$

Il ne faut pas confondre $7^4 + 7^4$ avec 14^4 !

2. Règles de priorité

Propriété :

Quand une expression comporte des puissances, on calcule en priorité :

1. Les calculs entre parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et les divisions

Pour deux nombres a et b non nuls, on a :

$$(a \times b)^p = a^p \times b^p \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\rightarrow \text{Ainsi :} \quad (a \times b)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2 \times b^2$$

$$(3x)^2 = 3x \times 3x$$

$$= 3 \times x \times 3 \times x$$

$$= 3 \times 3 \times x \times x$$

$$= 9x^2$$

$$\text{Exemples : } (2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4,$$

$$\rightarrow \text{ainsi : } (3x)^2 \neq 3x^2, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3},$$

$$7 - 5 \times 4^2 = 7 - 5 \times 16 = 7 - 80 = -73$$