Théorème de THALES

I - Produit en croix :

On utilise le produit en croix pour résoudre des équations du style : $\frac{x}{3} = \frac{5}{6}$.

On rencontre 4 configurations de base selon la position de la variable.

a) $\frac{7x}{5} = \frac{7}{10}$

$7x \times 10 = 7 \times 5$

$70x = 35$

$\frac{70x}{70} = \frac{35}{70}$

$x = \frac{\boxed{35} \times 1}{\boxed{35} \times 2} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{x} = \frac{6}{17}$

$x \times 6 = 3 \times 17$

$6x = 51$

$\frac{6x}{6} = \frac{51}{6}$

$x = \frac{17 \times \boxed{3}}{\boxed{3} \times 2} = \frac{17}{2}$

c) $\frac{4}{5} = \frac{2}{x}$

$x \times 4 = 5 \times 2$

$4x = 10$

$\frac{4x}{4} = \frac{10}{4}$

$x = \frac{5 \times \boxed{2}}{\boxed{2} \times 2} = \frac{5}{2}$

d) $\frac{9}{4} = \frac{x}{3}$

$x \times 4 = 9 \times 3$

$4x = 27$

$\frac{4x}{4} = \frac{27}{4}$

$x = \frac{27}{4}$

II - Théorème de Thalès (théorème direct) :

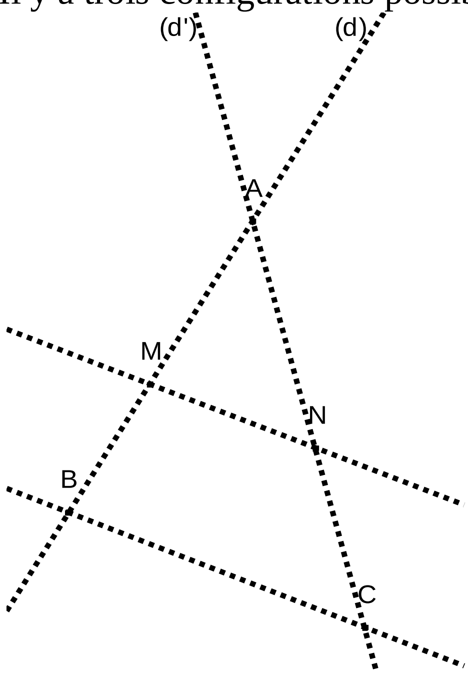
1) Théorème de Thalès:

Théorème

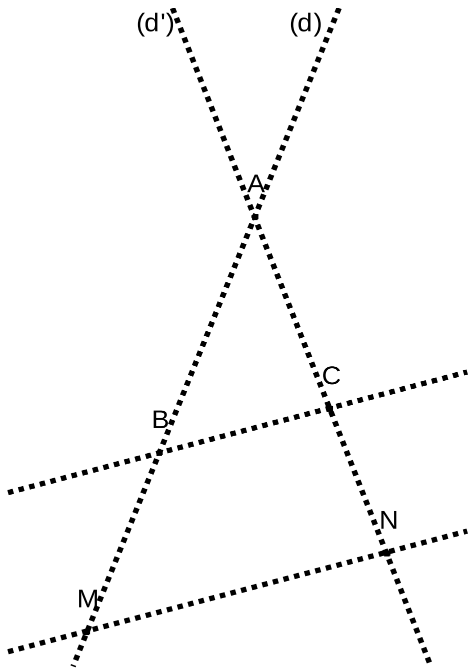
Etant données deux droites *d* et *d'* sécantes en A, deux points B et M de *d*, distincts de A, deux points C et N de *d'*, distincts de A,

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{BC}}$

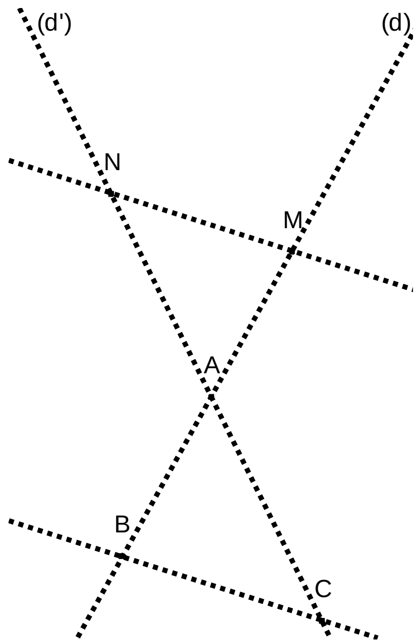
Il y a trois configurations possibles :



- **M∈[AB] et N∈[AC]**

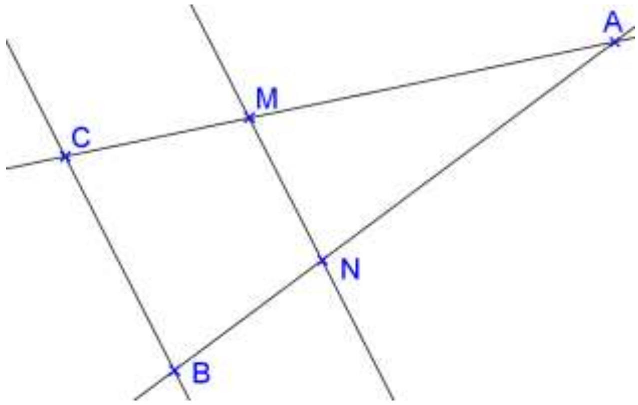


- **M∈[AB) et M∉[AB]**
  N∈[AC) et N∉[AC]



- **M∈[BA) et M∉[AB]**
  N∈[AC) et N∉[AC]

2) Exemples :



Ex : La figure n'est pas à l'échelle.
Les unités sont en centimètres.
AM = 30 ;
AB = 60 ;
AC = 80.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

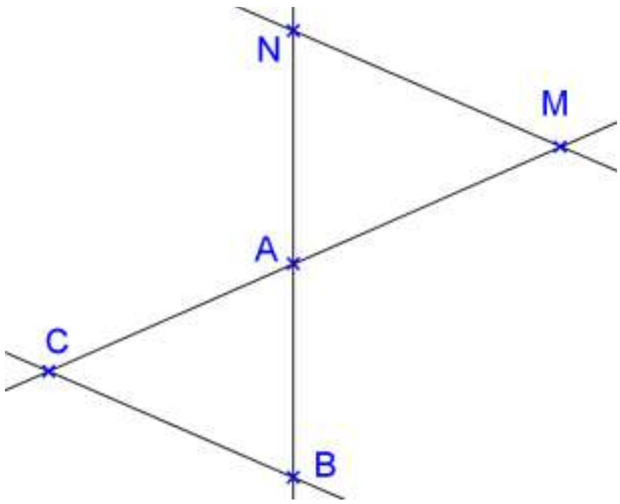
Calculer AN.

Soit x la longueur AN (je déclare ma variable).
Les droites (BM) et (CN) se coupent en A et $(\mathrm{BC})//(\mathrm{MN})$.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}} \text{ soit : } \frac{30}{80}=\frac{x}{60}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}.$$

Ainsi : $\frac{30}{80}=\frac{x}{60}$: D'après le produit en croix : $80\times x=30\times 60$

$$x=\frac{30\times 60}{80}=\frac{3\times\boxed{10}\times 3\times\boxed{2}\times 10}{4\times\boxed{2}\times\boxed{10}}=\frac{90}{4}=\frac{45}{2}=22{,}5\,\mathrm{cm}.$$



Ex : La figure n'est pas à l'échelle.
Les unités sont en centimètres.
(UV) // (JK).
AB = 30 ;
AC = 20 ;
AN = 10 ;
MN = 15.

Calculer AM.

Soit x la longueur AM et y la longueur BC (je déclare mes variables).
Les droites (BM) et (CN) se coupent en A et $(\mathrm{BC})//(\mathrm{MN})$.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{CB}} \text{ soit : } \frac{x}{20}=\frac{10}{30}=\frac{15}{y}$$

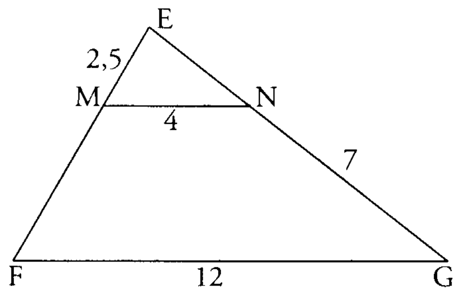
$\frac{x}{20}=\frac{10}{30}$: D'après le produit en croix : $30\times x=20\times 10$,

d'où : $x=\frac{20\times 10}{30}=\frac{20}{3}\simeq 6{,}7$: $AM\simeq 6{,}7$ cm

3. Donné au brevet :

Le dessin ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Les droites (NM) et (FG) sont parallèles.
On donne les longueurs suivantes : EM = 2 cm ; MN = 4 cm ; NG = 7 cm ; FG =12 cm.

Calculer les longueurs MF et EN.



III - Réciproque du Théorème de Thalès :

1) Réciproque du Théorème de Thalès :

Etant données deux droites *d* et *d'* sécantes en A, deux points B et M de *d*, distincts de A, deux points C et N de *d'*, distincts de A,

Si $\mathbf{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}}$

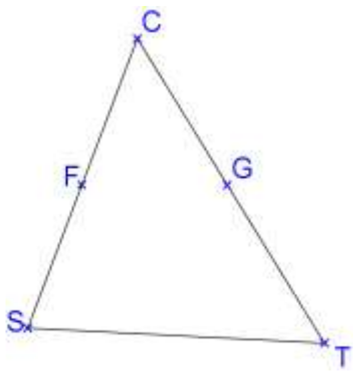
et si **les points A, B, M sont dans le même ordre que les points A, C, N,**

alors **les droites (BC) et (MN) sont parallèles.**

2) Exemples :

Ex 1 : Sur la figure ci-contre, on donne :
CF = 2 cm ; CS = 4 cm ; CG = 3 cm ; CT = 6 cm ;

Montrer que (FG) et (ST) sont parallèles.



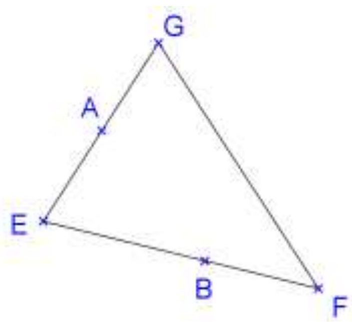
→ Le sommet principal est C.

$$\frac{CF}{CS} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{CG}{CT} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\dfrac{CF}{CS} = \dfrac{CG}{CT} = \dfrac{1}{2}$ **et les points C, F, S et les points C, G, T sont dans le même ordre.**

D'après la réciproque du Théorème de Thalès : $(FG)//(ST)$

Ex 2 : Sur la figure ci-contre, on donne :
EA = 2,8 cm ; EB = 4,2 cm ; EF = 3 cm ; EG = 6 cm ;
Les droites (AB) et (FG) sont-elles parallèles ?

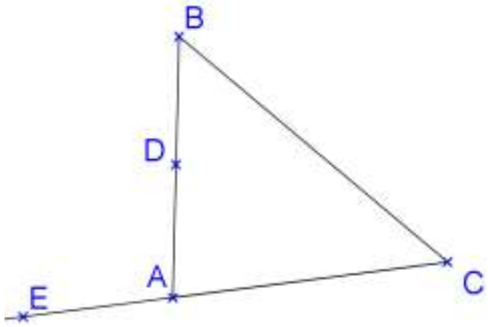


→ Le sommet principal est E.

$$\frac{EA}{EG} = \frac{2,8}{4,2} = \frac{28}{42} = \frac{\boxed{14} \times 2}{\boxed{14} \times 3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{EB}{EF} = \frac{3,6}{6} = \frac{36}{60} = \frac{\boxed{6} \times 6}{\boxed{6} \times 10} = 0,6$$

$\dfrac{2}{3} \neq 0,6$ donc $\dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EB}{EF}$: La réciproque du Théorème de Thalès ne s'applique pas.
Les droites (AB) et (FG) ne sont pas parallèles.

Ex 3 : Sur la figure ci-contre, on donne :
AD = 2 cm ; AB = 4 cm ; AE = 3 cm ; AC = 6 cm ;
Les droites (BC) et (ED) sont-elles parallèles ?

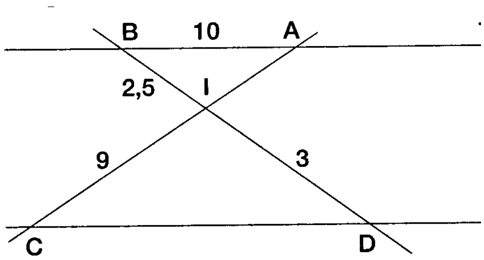


→ Le sommet principal est A.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{AE}{AC}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, $\frac{CF}{CS}=\frac{CG}{CT}=\frac{1}{2}$ **mais les points A, D, B et les points A, E, C <u>ne sont pas dans le même ordre</u>.** La réciproque du Théorème de Thalès ne s'applique pas.
Les droites (BC) et (ED) ne sont pas parallèles.

<u>Exercice</u> :
La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On donne : IB = 2,5 ; AB = 10 ; ID = 3 ;
AE = 12 ; IC = 9.
Les droites (AI) et (DE) sont-elles parallèles ?



→ B est le sommet principal (on se place « dans le triangle BDE »)

$$\frac{BA}{BE}=\frac{10}{10+12}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11} \quad \text{et} \quad \frac{BI}{BD}=\frac{2,5}{2,5+3}=\frac{2,5}{5,5}=\frac{2,5\times 2}{5,5\times 2}=\frac{5}{11}$$

Ainsi $\frac{BA}{BE}=\frac{BI}{BD}=\frac{5}{11}$ et les points B, A, E et B, I, D sont alignés dans le même ordre.
D'après la réciproque du théorème de Thalès : (AI) // (DE)

IV – <u>Agrandissement - Réduction :</u>

Les configurations de Thalès traduisent des situations de proportionnalité, et donc des situations d'agrandissement ou de réduction.

Propriété :
Dans un agrandissement (ou une réduction) de rapport k :
- les angles sont conservés,
- le parallélisme est conservé,
- les longueurs sont multipliées (ou divisées) par k,
- les aires sont multipliées (ou divisées) par k^2,
- les volumes sont multipliés (ou divisées) par k^3.

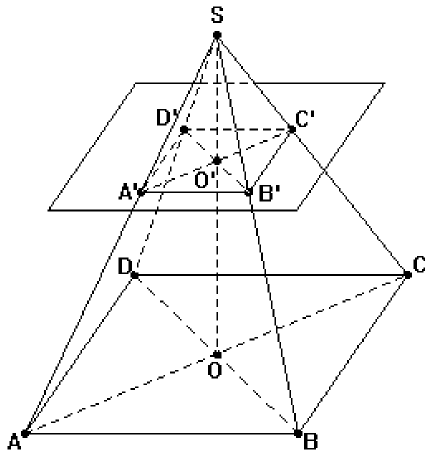
Méthode :
Pour trouver un coefficient d'agrandissement, on divise 2 longueurs correspondantes.

Sur la figure ci-contre, $(A'B')//(AB)$.

Le triangle SAB est un agrandissement du triangle SA'B'.
Soit k le coefficient d'agrandissement :

$AB = k \times A'B'$, $SA = k \times SA'$, $SB = k \times SB'$

Si on connaît AB et A'B', on peut aisément calculer K.



On a alors, en considérant la face A'B'C'D' parallèle à ABCD :

pour les aires : $\mathrm{A}_{SAB} = k^2 \times \mathrm{A}_{SA'B'}$ et $\mathrm{A}_{SABCD} = k^2 \times \mathrm{A}_{SA'B'C'D'}$

pour les volumes : $V_{SABCD} = k^3 \times V_{SA'B'C'D'}$

<u>Ex :</u>

Une statuette mesurant 0,50 m pèse 3 kg.
Il a fallu 100 g de peinture pour la peindre.
Cette statuette est une réduction exacte d'une statue de 20 mètres de haut.

1) Quel est le coefficient d'agrandissement de la statue ?
2) Quelle quantité de peinture faut-il prévoir pour peindre la statue ?
3) Combien pèse cette statue ?

Corrigé :

1) Pour trouver le coefficient d'agrandissement, on peut comparer des longueurs correspondantes, ici les tailles de la statuette appelée l et de la statue appelée L :

$L = k \times l$

Soit : $20 = k \times 0,5$

D'où : $\frac{20}{0,5} = k$

Soit : $k = 40$: la statue est 40 fois plus grande que sa maquette.

2) **La quantité de peinture est proportionnelle à la surface à peindre.**

En appelant S et s les surfaces de la statue et de la statuette, on sait que : $S = k^2 \times s$
Cette relation s'applique directement aux quantités de peinture :

$$x = k^2 \times 100 = 40^2 \times 100 = 1\ 600 \times 100 = 160\ 000\ g = 160\ kg$$

Il faut prévoir 160 kg de peinture pour peindre la statue.

3) **Le poids de la statue est proportionnel à son volume.**

En appelant V et v les volumes de la statue et de la statuette, on sait que : $V = k^3 \times v$
Cette relation s'applique directement aux poids de la statue et de la statuette :

$$P = k^3 \times p = 40^3 \times 3 = 64\ 000 \times 3 = 192\ 000\ kg = 192\ t$$

La statue pèse 192 tonnes.