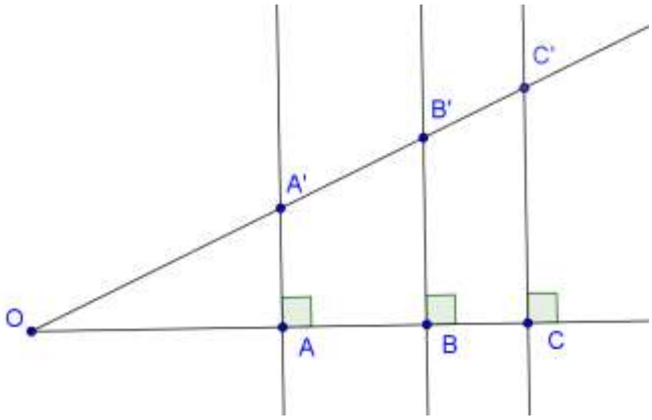
Trigonométrie dans un triangle rectangle

Activité Découverte :

Tracer une figure comme suit, en traçant 3 droites (AA’), (BB’) et (CC’) perpendiculaires à (OA).



Puis chacun mesure :

OA =	OB =	OC =
OA’ =	OB’ =	OC’ =
AA’ =	BB’ =	CC’ =

Puis chacun calcule :

$\frac{OA}{OA'} =$ $\quad\quad$ $\frac{OB}{OB'} =$ $\quad\quad$ $\frac{OC}{OC'} =$

→ chacun constate que ces rapports sont égaux.

→ chacun mesure alors son angle $O =$ et calcule avec sa calculatrice la valeur $\cos(O) =$ → c’est la même

Puis chacun calcule :

$\frac{AA'}{OA'} =$ $\quad\quad$ $\frac{BB'}{OB'} =$ $\quad\quad$ $\frac{CC'}{OC'} =$

→ chacun constate que ces rapports sont égaux.

→ chacun mesure alors son angle O et calcule avec sa calculatrice la valeur $\sin(O) =$ → c’est la même.

Puis chacun calcule :

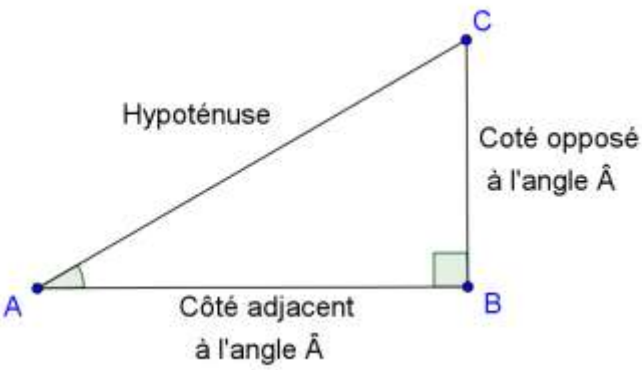
$\frac{AA'}{OA} =$ $\quad\quad$ $\frac{BB'}{OB} =$ $\quad\quad$ $\frac{CC'}{OC} =$

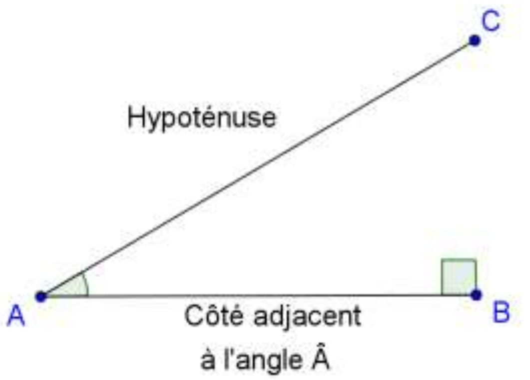
→ chacun constate que ces rapports sont égaux.

→ chacun mesure alors son angle O et calcule avec sa calculatrice la valeur $\tan(O) =$ → c’est la même.

I. Cosinus, sinus et tangente d’un angle aigu :

a. *Vocabulaire :*





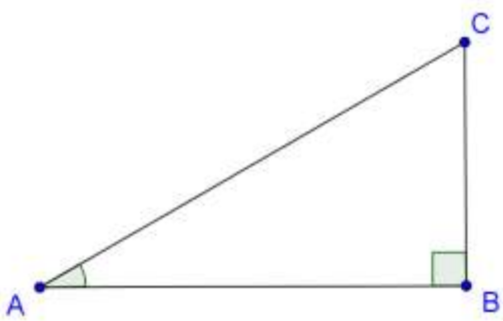
b. *Définitions :*

Dans un triangle ABC rectangle en B, on note :

$$\cos(\mathrm{A}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$

$$\sin(\mathrm{A}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$

$$\tan(\mathrm{A}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$



L'utilisation de ces formules permet, dans un triangle rectangle, de calculer une longueur de côté ou une mesure d'angle.

Exemple : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Dans le triangle ABC ci-contre, calculer la longueur AC.

→ Dans le triangle ABC rectangle en B :

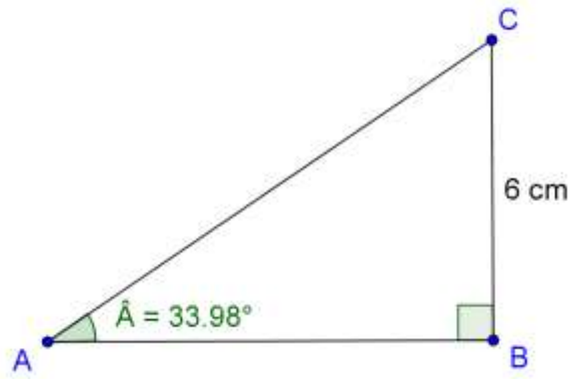
$$\sin(\mathrm{A}) = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sin(33{,}98)}{1} = \frac{6}{AC}$$

Produit en croix : $AC \times \sin(33{,}98) = 6 \times 1$

$$\frac{AC \times \sin(33{,}98)}{\sin(33{,}98)} = \frac{6}{\sin(33{,}98)}$$

$AC \simeq 10{,}74$ cm.



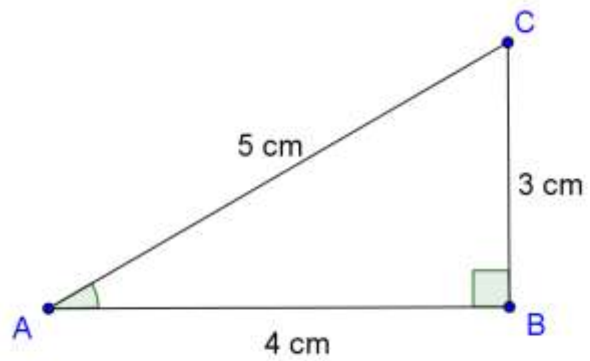
Exemple : Calcul de la mesure d'un angle

Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre, calculer la valeur de l'angle A : (3 possibilités)

$$\cos(\mathrm{A}) = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \qquad \mathrm{A} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 36{,}9°$$

$$\sin(\mathrm{A}) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \quad \text{donc} \quad \mathrm{A} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 36{,}9°$$

$$\tan(\mathrm{A}) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \qquad \mathrm{A} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 36{,}9°$$



II – Cercle trigonométrique :

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 unité.
On choisit un point B sur ce cercle.
Les coordonnées de B sont liées à l'angle de $[\mathrm{OB}]$ avec l'horizontale : $\mathrm{B}(\cos(37{,}1);\sin(37{,}1))$.

Le point A $(1;0)$ correspond à un angle de 0°, donc :

$\cos 0 = 1$ $\qquad$ $\sin 0 = 0$

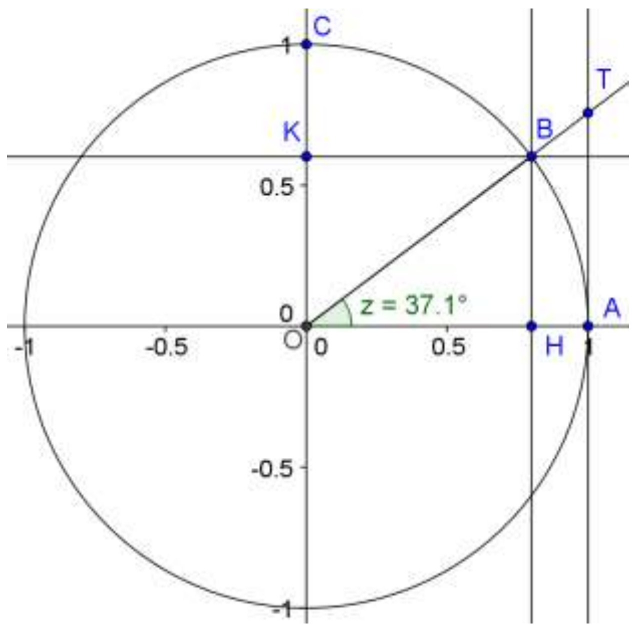
Le point C $(0;1)$ correspond à un angle de 90°, donc :

$\cos 90 = 0$ $\qquad$ $\sin 90 = 1$

Le rayon $[\mathrm{OB}]$ mesure 1 unité.

On peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH : $OH^2 + HB^2 = OB^2 = 1^2 = 1$.

La tangente de cet angle correspond à la longueur AT.



III - Formules et valeurs remarquables :

Rappel : Méthode de résolution :

$$x^2 + 0{,}8 = 1$$

$$x^2 + 0{,}8 - 0{,}8 = 1 - 0{,}8$$

$$x^2 = 0{,}2$$

$$x = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$$

Propriété :

Quel que soit le triangle ABC rectangle en B, A désignant un angle aigu (< 90°) quelconque :

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \qquad \text{et} \qquad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

De plus : $0 \le \cos A \le 1$ et $0 \le \sin A \le 1$

Exemple : On donne $\cos 60 = \frac{1}{2}$. Calculer $\sin 60$ puis $\tan 60$.

→ Pour tout angle, on a la formule trigonométrique :

$$\cos^2 60 + \sin^2 60 = 1$$

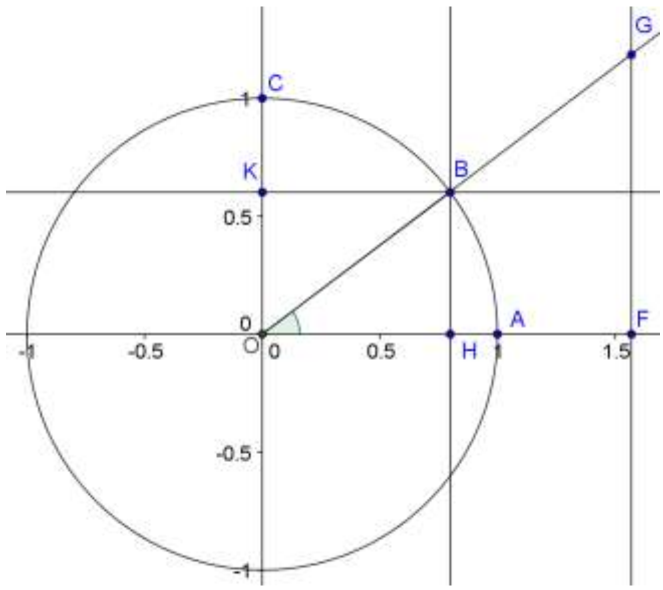
Donc : $\sin^2 60 = 1 - \cos^2 60 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Soit : $\sin 60 = \sqrt{\frac{3}{4}} \simeq 0{,}866$

De plus : $\tan 60 = \frac{\sin 60}{\cos 60} \simeq \frac{0{,}866}{0{,}5} = 1{,}732$

IV - Démonstrations :

Les formules de sinus, cosinus et tangente se démontrent avec le théorème de Thalès :



Dans le triangle OFG :

$B \in [OG]$, $H \in [OF]$ et $[HB] // [GF]$

D'après le théorème de Thalès : $\frac{OH}{OF} = \frac{OB}{OG} = \frac{HB}{FG}$

On rappelle que $OH = \cos FOG$, $BH = \sin FOG$ et $OB = 1$, donc :

$$\frac{\cos FOG}{OF} = \frac{1}{OG} = \frac{\sin FOG}{FG}$$

Les produits en croix donnent :

$$OG \times \cos FOG = OF \times 1 \rightarrow \cos FOG = \frac{OF}{OG}$$

$$OG \times \sin FOG = FG \times 1 \rightarrow \sin FOG = \frac{FG}{OG}$$

$$\tan FOG = \frac{\sin FOG}{\cos FOG} = \frac{\frac{FG}{OG}}{\frac{OF}{OG}} = \frac{FG}{OG} \times \frac{OG}{OF} = \frac{FG}{OF}$$

De plus : $\cos^2 FOG + \sin^2 FOG = \left(\frac{OF}{OG}\right)^2 + \left(\frac{FG}{OG}\right)^2 = \frac{OF^2}{OG^2} + \frac{FG^2}{OG^2} = \frac{OF^2 + FG^2}{OG^2}$

Or dans le triangle rectangle OFG, d'après le théorème de Pythagore :

$$OF^2 + FG^2 = OG^2$$

Donc :

$$\cos^2 FOG + \sin^2 FOG = \frac{OG^2}{OG^2} = 1$$