Racines carrées

I –Racine carrée d'un nombre positif :

Définition :
La racine carrée d'un **nombre positif** a est le **nombre positif** noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a.

Pour a ≥0 $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

Exemples : $2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$ donc : $\sqrt{4} = 2$

De même : $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Remarque : Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

Propriété : Pour tout **nombre positif** a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$

Exemples : $\sqrt{5^2} = 5$ $\left(\sqrt{3,8}\right)^2 = 3,8$

$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$ $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$

Remarque : $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ alors que $\sqrt{-8}^2$ n'a pas de sens car $\sqrt{-8}$ n'existe pas.

Définition : On appelle **carré parfait** un entier positif dont la racine carrée est un entier.

Exemples : 25 est un carré parfait car $\sqrt{25} = 5$

Liste des premiers carrés parfaits (à connaître) :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Valeurs exactes et valeurs approchées :

$\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{144} = 12$ $\sqrt{2} \approx 1,41$

II – Résolution d'équations du type $x^2 = a$, a > 0 :

Propriété : Soit a un nombre donné. L'équation $x^2 = a$ admet :

- **Quand a < 0,** l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
- **Quand a = 0**, l'équation $x^2 = 0$ n'admet qu'une seule solution $x = 0$.
- **Quand a > 0**, l'équation admet deux solutions : $x = \sqrt{a}$ **et** $x = -\sqrt{a}$ (l'opposé de la racine carrée de a)

Exemple : Résoudre l'équation

$$x^2 = 5$$
$$x^2 - 5 = 0$$
$$x^2 - \sqrt{5}^2 = 0$$
$$\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$$

Les solutions sont $x = \sqrt{5}$ **et** $x = -\sqrt{5}$

Remarque : L'équation $x^2 = -7$ n'a pas de solution.

III –Propriétés et formules

1. Multiplication :

Propriété :
Le produit des racines carrées de deux nombres est égal à la racine carrée de leur produit :
Pour tous les nombres positifs a et b : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

Exemples : $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$ $\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{36}=6$

Exemple de simplification : $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

Exercice : Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est le plus petit entier possible :

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{3}-2\sqrt{27}+4\sqrt{300}\\
&= \sqrt{3}-2\sqrt{9\times3}+4\sqrt{100\times3}\\
&= \sqrt{3}-2\sqrt{9}\times\sqrt{3}+4\sqrt{100}\times\sqrt{3}\\
&= \sqrt{3}-2\times3\times\sqrt{3}+4\times10\times\sqrt{3}\\
&= \sqrt{3}-6\sqrt{3}+40\sqrt{3}\\
&= 35\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ATTENTION :

1. *Pour* $a\geq0,\ \sqrt{a^2}=a$ → *Pour* $a<0,\ \sqrt{a^2}=-a$

   → Ex : $\sqrt{8^2}=\sqrt{64}=8$ → Ex : $\sqrt{(-8)^2}=\sqrt{64}=8$

2. Il n'y a aucune formule générale pour la somme et la différence de radicaux :

   $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$

   Exemples :

   $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ mais $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

   $\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ mais $\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

   $\sqrt{36}-\sqrt{49}=6-7=-1$ mais $\sqrt{36-49}$ n'a pas se sens car $36-49=-13<0$

2. Division :

Propriété :
Le quotient des racines carrées de deux nombres est égal à la racine carrée de leur quotient :

Pour tous les nombres positifs a et b **avec b≠0** : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Exemples :

$\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\dfrac{2}{5}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{3}{27}}=\sqrt{\dfrac{3}{3\times9}}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}$

3. Développement et factorisation avec des racines carrées :

On peut utiliser les formules pour développer des expressions contenant des racines carrées :

Ex : Développements

$3\left(\sqrt{5}+1\right)=3\times\sqrt{5}+3\times1=3\sqrt{5}+3$

$\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)=(1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1-3=-2$

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{8}+\left(\sqrt{8}\right)^2$

$=2-2\sqrt{16}+8=2-2\times4+8=2$

Factorisations

$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=(5-2+1)\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$\sqrt{98}-\sqrt{32}+\sqrt{8}=\sqrt{49\times2}-\sqrt{16\times2}+\sqrt{4\times2}$

$=\sqrt{49}\times\sqrt{2}-\sqrt{16}\times\sqrt{2}+\sqrt{4}\times\sqrt{2}$

$=7\times\sqrt{2}-4\times\sqrt{2}+2\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

Remarque : On évite de laisser une racine carrée au dénominateur pour un résultat final :

$$\frac{5}{\sqrt{8}}=\frac{5}{\sqrt{8}}\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\frac{5\sqrt{8}}{8}=\frac{5\sqrt{4\times 2}}{8}=\frac{5\times 2\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{8}{4+\sqrt{7}}=\frac{8\times\left(4-\sqrt{7}\right)}{\left(4+\sqrt{7}\right)\times\left(4-\sqrt{7}\right)}=\frac{8\times 4-8\times\sqrt{7}}{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{32-8\sqrt{7}}{16-7}=\frac{32-8\sqrt{7}}{9}$$ → **(a + b)(a – b) = a² – b²**